

UNIVERSIE BELHADJ BOUCHAIB D'AIN TEMOUCHENT
Faculté des Sciences et Technologie
Département « Mathématiques et Informatique »

Examen d'Ethiques et Déontologie - L3 Maths

NOM et Prénom :

1- (1pt) Cocher les bonnes réponses : L'Ethique est basé sur :

- 0,25 ✓ La croyance
0,25 - L'obligations
0,25 ✓ La valeur
0,25 ✓ La psychologie

2- (1pt) Est-ce que l'Ethique et la Déontologie sont des synonymes :

- Oui
1 ✓ Non

3- (2pt) Donner une définition de l'Enseignement :

2 l'enseignement est une pratique visant à transmettre un savoir à un élève dans le cadre d'une institution éducative.

4- (1,5pt) Cité quelques problème d'éthique d'enseignement :

- 0,5 - Plagiat
0,5 - La triche
0,5 - La violence

5- (2pt) Cité les différents types de plagiat :

- 0,5 - Plagiat direct
0,5 - copier-coller
0,5 - Traduction
0,5 - l'auto-plagiat.

6- (1pt) Est-ce que la citation est un plagiat :

- Oui
1 ✓ Non

7- (2pt) Donner une définition de la triche :

2 consiste à utiliser des moyens frauduleux pour obtenir des réponses en vue d'obtenir un bon résultat.

8- (1,5pt) Cité quelques méthodes de la triche :

- 0,5 - Recopier sur son voisin
0,5 - Communiquer avec les autres à l'aide d'un tel portable
0,5 - Ecriture sur table.

9- (6pt) Nous avons cinq méthode d'enseignement ; cité trois méthode avec définition :

a) Enseignement direct : est une méthode dirigée par l'enseignant. l'enseignant se tient devant la salle et présente les informations.

b) Enseignement indirect : demande aux étudiants de préparer des objets, c'est l'accompagner de l'étudiant.

c) Apprentissage expérimental : basé sur l'apprentissage de l'élève de manière guidée et pendant aboutir à un certain degré d'indépendance.

10- (2pt) Exprimez dans quelques ligne votre vision sur l'enseignements et les problèmes qui se trouve dans les établissements :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bon Courage
Dr.MEKHALFI

Corrigé Type de l'examen
de Géométrie différentielle
L3 maths 2022\2023

07 Exercice 01: 07 points, voir le cahier de cours

Les questions (3) et (4) sont notées sur 1,5 pt, le reste 1 pt.

Exercice 02: La solution est sur le cahier des travaux dirigés,

On décompose d en deux applications

$$d: I \xrightarrow{f} \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{n \text{ fois}} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$t \mapsto (X_1(t), \dots, X_n(t)) \mapsto d(t) = \text{Det}(X_1(t), \dots, X_n(t))$$

D'où $d = g \circ f$, il est clair que f est différentiable (fonction vectorielle), ainsi que g étant qu'application linéaire par colonne.

$$\vec{f}(t) = (\dot{X}_1(t), \dots, \dot{X}_n(t)), \forall t \in I.$$

En utilisant les résultats de l'ex03 (citer ces résultats), on obtient

$$d'(t) = (g \circ f)'(t) = Dg(f(t)) \cdot \vec{f}(t) = \sum_{i=1}^n \text{Det}(X_1(t), \dots, \dot{X}_i(t), \dots, X_n(t))$$

Application: $d(t) = \begin{vmatrix} 1 & t & t^2 \\ 0 & t & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = t - t^3 \Rightarrow d'(t) = 1 - 3t^2$, d'une part

$$d'(t) = \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & t & t^2 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_0 + \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & t^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{1-t^2} + \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & t & 2t \\ 0 & t & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}_{-2t^2} = 1 - 3t^2 \quad \text{C.Q.F.D}$$

Exercice 03: Soit l'équation $x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 2 = 0$, $x_0 = 1$

$$\text{Soit } f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 2 = 0$$

$$f(x_0, y_0) = 0 \Rightarrow f(1, y_0) = 0 \Rightarrow y_0(y_0 - 1) = 0 \Rightarrow y_0 = 0 \text{ ou } y_0 = 1$$

On a deux points $(1, 1)$ ou $(1, 0)$, on peut choisir l'un des deux points, nous choisirons le point $(1, 1)$

La fonction est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car c'est une fonction polynomiale.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2x + 2y + 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 1, \text{ d'après le théorème des fonctions implicites}$$

il existe un pavé ouvert $I \times J \subset \mathbb{R}^2$ contenant $(1, 1)$ tel que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2x + 2y + 1 \neq 0, \forall (x, y) \in I \times J$$

La fonction $y: I \rightarrow J$ est de classe C^1 et vérifie $y(1)=1$, $f(x, y(x))=0$
 $x \mapsto y(x)$

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)} = - \frac{2x - 2y + 1}{-2x + 2y + 1} = \frac{2x - 2y(x) + 1}{2x - 2y(x) - 1}$$

1,25 $y'(1) = \frac{dy}{dx} \Big|_{x=1} = \frac{2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 1}{2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 - 1} = -1$ On $\boxed{\frac{dy}{dx} \Big|_{x=1} = -1}$

1,25 $y''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{4(y'(x) - 1)}{(2x - 2y(x) - 1)^2}$, $\boxed{y''(1) = \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=1} = -8}$

Exercice 03: Soit $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = az\}$, $a \in \mathbb{R}$.

1,5 • Soit $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - az = 0$, la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ car c'est une fonction polynomiale de trois variables;

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\text{Grad } f(x, y, z) = (2x, 2y, -a)$; si $a > 0$ le gradient est non nul d'où M est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2.

1,5 • Soit $(x_0, y_0, z_0) = (0, a, a)$, l'équation de l'espace tangent à M en (x_0, y_0, z_0) est donnée par :

$$(x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0) \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0 \Rightarrow$$

$$(x - 0) \cdot 0 + (y - a) \cdot 2a + (z - a) \cdot (-a) = 0 \Rightarrow \boxed{2y - z - a = 0}$$

1 • Si $a = 0$, alors $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y = 0\}$

M est une droite de l'espace $\mathbb{R}^3$ (l'axe des z) qui est une sous-variété de dimension = 1.

Ex 01 (08 pts)

$$f_x(n, \theta) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \theta e^{-\theta x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

① Fonction caractéristique $\varphi_x(t) = ?$

$$\begin{aligned} \varphi_x(t) &= E(e^{itx}) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_x(n, \theta) dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{itx} \theta e^{-\theta x} dx \\ &= \theta \int_0^{+\infty} e^{x(it - \theta)} dx \\ &= \frac{\theta}{it - \theta} \left[e^{x(it - \theta)} \right]_0^{+\infty} \end{aligned}$$

$$\varphi_x(t) = \frac{\theta}{\theta - it} \quad (0,5)$$

② $\tilde{\theta}_n = 1/n$ est-il E.N.N. de θ ?

$$\left(\tilde{\theta}_n \text{ E.N.N. } \theta \right) \Leftrightarrow \left(\tilde{\theta}_n \text{ est de } E(X^k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_{n,i}^k \right) \quad (0,5)$$

Pour $k=1$

$$(a) \Rightarrow E(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{n,i}$$

Or $(X_{n,1}, \dots, X_{n,n})$ issue de $X \in \mathcal{P}(0)$.

d'où $E(X_i) = E(X) = 1/\theta$ pour $i=1, \dots, n$.

$$(a) \Rightarrow 1/\theta = \bar{X}_n$$

$$\Rightarrow \tilde{\theta}_n = \frac{1}{\bar{X}_n} \text{ E.N.N. de } \theta. \quad (0,1)$$

3) $\tilde{\theta}_n$ est-il consistant?

En appliquant le 1^{er} théorème des grands nombres (L.F.G.N) à la suite de v.a.r. i.i.d. $(X_i)_{i=1}^n$, on obtient $(0,1)$

$$\left(\bar{X}_n \xrightarrow{p.s.} E(X_i) = 1/\theta \right) \dots (0,1)$$

$$(a) \Rightarrow \frac{1}{\bar{X}_n} \text{ converge p.s. vers } \theta$$

$$\Rightarrow \tilde{\theta}_n \text{ converge en proba vers } \theta$$

$$\Rightarrow \tilde{\theta}_n \text{ est consistant} \quad (0,1)$$

$$4) \text{ n.g. } \frac{\theta S_n - n}{n} \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0,1)$$

$$\text{D'après le T.C.L. } \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{\text{Var } S_n}} \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0,1). \quad (0,1)$$

$$(a) : \left(S_n = \sum_{i=1}^n X_{n,i} \right) \Rightarrow \begin{cases} E(S_n) = n E(X_i) \\ = n/\theta \end{cases} \quad (0,1)$$

$$\begin{cases} \text{Var}(S_n) = n/\theta^2 \\ \text{car } (X_i) \text{ s.v. ind.} \end{cases}$$

Et donc

$$\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{Var S_n}} = \frac{S_n - n\theta}{\sqrt{n\theta^2}}$$

$$= \frac{\theta S_n - n}{r_n} \quad / \quad 0.70.$$

cl₂ $\frac{\theta S_n - n}{r_n} \xrightarrow{Lec} dP(0,1)$

⑤ I.C pour θ en f^{ct} de $\tilde{\theta}_n$ avec $\alpha = 0.05$
de la G5. on pose :

$$g(\underline{x}, \theta) = \frac{\theta S_n - n}{r_n}$$

Pour n assez grand : $g(\underline{x}, \theta) \in dP(0,1)$.

Soit $t_{\alpha/2} > 0$.

$$P(|g(\underline{x}, \theta)| > t_{\alpha/2}) = \alpha \quad \text{--- (1)}$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow P\left(-t_{\alpha/2} \leq g(\underline{x}, \theta) \leq t_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow F_z(t_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad / \quad z \in dP(0,1)$$

$$= 1 - \frac{0.05}{2}$$

$t_{\alpha/2} = 1.96$ de la table de $dP(0,1)$

D'autre part

$$\left(-t_{\alpha/2} \leq g(\underline{x}, \theta) \leq t_{\alpha/2}\right) \Rightarrow -t_{\alpha/2} \leq \frac{\theta S_n - n}{r_n} \leq t_{\alpha/2}$$

$$\Rightarrow \frac{n - r_n t_{\alpha/2}}{S_n} < \theta < \frac{n + r_n t_{\alpha/2}}{S_n}$$

$$\text{on } \tilde{\theta}_n = \frac{1}{\bar{x}_n} = \frac{n}{S_n}$$

d'autre

$$IC_{\theta} = \left[\tilde{\theta}_n \left(1 - \frac{t_{\alpha/2}}{r_n}\right), \tilde{\theta}_n \left(1 + \frac{t_{\alpha/2}}{r_n}\right) \right]$$

App :

$$\tilde{\theta}_{400} = 0.274, \quad r_n = 40$$

$$t_{\alpha/2} = 1.96.$$

$IC_{\theta}^{0.05} = [0.247; 0.301]$

Ex 02 (07pts)

$$f_{a, \theta}(x) = a e^{-a(x-\theta)} \mathbb{1}_{[0, +\infty[}$$

$a, \theta > 0$, a connu.

(1) $\hat{\theta} \in \mathcal{O} \vee \theta ?$

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta > 0} L(\underline{x}, \theta)$$

by $L(\underline{x}, \theta)$ la vraisemblance

$$L(\underline{x}, \theta) = \prod_{i=1}^n f_{a, \theta}(x_i) = a^n e^{-a(\sum_{i=1}^n x_i - n\theta)} \prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{[0, +\infty[}$$

$$\textcircled{0.5} = a^n e^{an\theta} e^{-a \sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{[0, +\infty[}$$

$L(\underline{x}, \theta)$ n'est pas diff par rapport à θ
car: $\prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{[0, +\infty[} = 1$ ou 0 .

$$\text{On a: } \left(\prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{[0, +\infty[}(x_i) = 1 \right) \Leftrightarrow \left(\forall i = 1, \dots, n \quad x_i \geq 0 \right)$$

$$\textcircled{0.5} \Rightarrow \min_{1 \leq i \leq n} x_i \geq 0.$$

$$\text{donc: } \left(\prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{[0, +\infty[}(x_i) = 1 \right) \Leftrightarrow \mathbb{1}_{[0, +\infty[}(x_{(1)}) = 1$$

$$\text{car: } x_{(1)} = \min_{1 \leq i \leq n} x_i$$

et donc

$$L(\underline{x}, \theta) = a^n e^{an\theta} e^{-a \sum_{i=1}^n x_i} \mathbb{1}_{[0, +\infty[}$$

$L(\underline{x}, \theta)$ est croissante en θ (à cause de $e^{an\theta}$).

et $\forall x_{(1)} \geq 0$, $L(\underline{x}, \theta)$ n'est pas nulle

et par suite le max est obtenu par la valeur

$$\hat{\theta} = x_{(1)}$$

$\textcircled{0.5}$

2) Loi de Probabilité de $\hat{\theta} = x_{(1)}$.

$$F_{x_{(1)}}(x) = P(x_{(1)} \leq x)$$

$$= P(\min_{1 \leq i \leq n} x_i \leq x)$$

$$= 1 - P(x_1 > x, \dots, x_n > x)$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^n P(x_i > x)$$

$$= 1 - [1 - F_{x_i}(x)]^n \quad \textcircled{0.5}$$

$$F_{x_{(1)}}(x) = [1 - e^{-na(x-\theta)}] \mathbb{1}_{[0, +\infty[}$$

La densité est alors:

$$f_{x_{(1)}}(x) = F'_{x_{(1)}}(x)$$

$$f_{x_{(1)}}(x) = na e^{-na(x-\theta)} \mathbb{1}_{[0, +\infty[}$$

$\textcircled{0.5}$

$$\begin{aligned}
 i) E(\hat{\theta}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\hat{\theta}}(x) dx \\
 &= \int_{+\theta}^{+\infty} x na e^{-na(x-\theta)} dx \\
 &= x e^{-na(x-\theta)} \Big|_{+\theta}^{+\infty} + \int_{+\theta}^{+\infty} e^{-na(x-\theta)} dx
 \end{aligned}$$

$$E(\hat{\theta}) = \theta + \frac{1}{na} \quad (0,1)$$

$$ii) Var(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}^2) - E^2(\hat{\theta})$$

$$E(\hat{\theta}^2) = \int_{+\theta}^{+\infty} x^2 na e^{-na(x-\theta)} dx$$

$$E(\hat{\theta}^2) = \theta^2 + \frac{2\theta}{na} + \frac{2}{n^2 a^2}$$

$$Var(\hat{\theta}) = \frac{1}{n^2 a^2} \quad (0,1)$$

4) a) biais.

$$E(\hat{\theta}) = \theta + \frac{1}{na} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \theta$$

$\hat{\theta}$ est asymptotiquement sans biais

(0,1)

ii) Consistent

$\hat{\theta}$ est asymptotiquement sans biais
avec $Var(\hat{\theta}) = \frac{1}{n^2 a^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

donc : $\hat{\theta}$ est consistant (0,1)

iii) Exhaustif

D'après P.194

$$L(\underline{x}, \theta) = a^n e^{an\theta} e^{-a \sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^n 1_{[\theta, +\infty[}(x_i)$$

$$= \underbrace{a^n e^{-a \sum_{i=1}^n x_i}}_{h(x)} \underbrace{e^{an\theta} \prod_{i=1}^n 1_{[\theta, +\infty[}(x_i)}_{g(x, \theta)}$$

$$= h(x) \cdot g(x, \theta)$$

Par factorisation de $L(\underline{x}, \theta)$, on constate
que $X_{(n)}$ est une stat. exhaustive

(0,1) et donc $\hat{\theta} = X_{(n)}$ est exhaustif

iv) Le fait que $\hat{\theta}$ est biaisé

donc on peut par parler d'efficacité
de ce cas.

(0,1)

$\hat{\theta}$ n'est pas efficace.

Ex 03: $0.5 P^b$

Sait $\mu = 41.5$

$$H_0: \mu = 41.5$$

$$H_1: \mu > 41.5$$

test une p-tière α droite. ✓

tes, il s'agit d'un test de la moyenne avec σ^2 inconnue. avec $\alpha = 0.05$. ✓

On a $\bar{x}_n = 45$, $n = 100$, $s_n^2 = 11.25$

i) La variable du test

$$Z = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{s_n^2}} = Z(X, \mu)$$

avec $s_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$ ou σ^2

$$s_n^2 = \frac{n}{n-1} S^2$$

Soit $H_0: Z = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - 41.5}{\sqrt{s_n^2}}$ $\nearrow$ 95

0.5

Student de degré $n-1$.

ii) Région de rejet

$$W = \{z / Z(X, \mu) > z_\alpha\} \leftarrow z_\alpha > 0.$$

$$\text{Lq } P_{H_0}(W) = \alpha \quad \text{--- (1) } \leftarrow 0.5$$

$$(1) \Rightarrow P(Z(X, \mu) > z_\alpha) = \alpha.$$

$$\Rightarrow F_Z(z_\alpha) = 1 - \alpha.$$

$$\Rightarrow F_Z(z_\alpha) = 1 - 0.05 = 1 - \frac{0.05}{2}$$

de la table $z_\alpha \approx 2.374$ 0.5

J_{95}

$$W =]2.374, +\infty[\quad 0.5$$

iii) valeur observée z_0 .

$$z_0 = \sqrt{n} \frac{\bar{x}_n - 41.5}{\sqrt{s_n^2}}$$

$$\sqrt{s_n^2} = \sqrt{\frac{n}{n-1} S^2} \quad 0.5$$

$$= \sqrt{\frac{100}{99}} \cdot 11.25 = 11.25$$

$$z_0 = 10 \frac{45 - 41.5}{11.25}$$

$$z_0 = 3.10 \quad 0.5$$

iv) $z_0 \in W \rightarrow$ Rejet de H_0 , le test est significatif 0.5

en faveur de la culture de la nouvelle variété.

Examen de introduction à Théorie des opérateurs linéaires

Exercice 1 (Questions de cours) (10pts)

Soit H un espace de Hilbert, A un Opérateur défini de H à valeurs dans H .
Monter que:

1. Si l'opérateur A est positif alors $\sigma_p(A) \subseteq \mathbb{R}^+$. (2)
2. Si l'opérateur A est unitaire alors $\sigma_p(A) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1\}$. (2)
3. $\rho(A)$ est un ouvert non vide de $\mathbb{K}$. (2)
4. $\sigma(A)$ est un compact non vide de $\mathbb{K}$. (2)
5. Si A est auto-adjoint et $\lambda, \mu \in \sigma_p(A)$, $\lambda \neq \mu$, alors $\text{Ker}(\lambda I - A) \perp \text{Ker}(\mu I - A)$. (2)

Exercice 2 (6 pts) On note $E = L^2[0, 1]$ l'espace des fonctions de carré intégrable sur $[0, 1]$. On définit sur E l'opérateur

$$A : E \rightarrow E, \quad f \mapsto Af, \quad \text{avec } A(f)(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

1. Montrer que $A : E \rightarrow E$ est linéaire borné. (2)
2. Déterminer l'opérateur A^* . (1)
3. Montrer que $\forall n \geq 1$, on a $|A^n f(x)| \leq \frac{x^n}{n!} \|f\|_\infty$. (2)
4. Déterminer le rayon spectral de A . (1)

Exercice 3 (4 pts) On désigne par $H = L^2[0, \frac{\pi}{2}]$ l'espace de Hilbert complexe. $\forall f \in H$, on définit l'opérateur Tf par:

$$\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad (Tf)(t) = \cos(t) \int_0^t \sin(s) f(s) ds.$$

1. Montrer que $Tf : H \rightarrow H$ est linéaire continue. (2)
2. Déterminer l'adjoint T^* de l'opérateur T . (2)

Examen de introduction à Théorie des Opérateurs Linéaires

Exo 1:

1) Un opérateur positif, $\forall x \in H, \langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}_+$

Si $\lambda \in \sigma_p(A)$ alors $\exists x \neq 0$ tq $Ax = \lambda x$.

$$\text{On obtient } \lambda \|x\|^2 = \lambda \langle x, x \rangle = \langle Ax, x \rangle$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\langle Ax, x \rangle}{\|x\|^2} \in \mathbb{R}_+, \text{ D'où } \lambda \in \mathbb{R}_+.$$

2) Supposons A unitaire. Si $\lambda \in \sigma_p(A)$ alors

$$\langle A^*Ax, x \rangle = \langle Ax, Ax \rangle = \|Ax\|^2 = |\lambda|^2 \|x\|^2$$

$$\text{D'autre part, } \langle A^*Ax, x \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$$

$$\text{Donc } |\lambda| = 1.$$

3) On considère l'app $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{L}(H)$

$$\lambda \longmapsto f(\lambda) = \lambda I - A$$

On remarque que $f(A) = f^{-1}(\mathcal{L}_i(H))$

$$\text{et } \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C} \text{ on a: } \|f(\lambda) - f(\mu)\| = \|\lambda I - A - \mu I + A\|$$

$$= \|(\lambda - \mu)I\|$$

$$= |\lambda - \mu|$$

d'où f est continue. Or $\mathcal{L}_i(H)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(H)$

on en déduit que $f(A) = f^{-1}(\mathcal{L}_i(H))$ est un ouvert de $\mathbb{C}$

4) On a $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus f(A)$ est fermé et $\sigma(A)$ est borné

car $\sigma(A) \subset B(0, \|A\|)$ alors il est compact.

5) Si $x \in \text{Ker}(\lambda - A)$ et $y \in \text{Ker}(\mu - A)$

Ma $\langle x, y \rangle = 0$? alors $Ax = \lambda x$ et $Ay = \mu y$

Comme $A = A^*$, $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$, on obtient

$$(\lambda - \mu) \langle x, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle - \langle x, \mu y \rangle$$

$$= \langle Ax, y \rangle - \langle x, Ay \rangle$$

$$= \langle Ax, y \rangle - \langle Ax, y \rangle = 0$$

Exo 2:

1) Ma A est linéaire borné $\forall f \in L^2([0, 1])$

$$\|Af\|^2 = \int_0^1 |Af(x)|^2 dx = \int_0^1 \left| \int_0^x f(t) dt \right|^2 dx$$

$$= \int_0^1 \left\| \int_0^1 f(t) dt \right\|^2 dx \leq \int_0^1 \int_0^1 |f(t)|^2 dx$$

$$\leq \|f\|^2 \int_0^1 dx \leq x \|f\|^2 \text{ Donc } A \text{ est borné.}$$

2) $\mathcal{L}$ adjoint de A

$$\langle Af, g \rangle = \langle f, A^*g \rangle = \int_0^1 (Af)(x) \overline{g(x)} dx = \int_0^1 \left(\int_0^x f(t) dt \right) \overline{g(x)} dx$$

$$= \left[Af(x) \overline{Ag(x)} \right]_0^1 - \int_0^1 f(x) \overline{Ag(x)} dx = Af(1) \overline{Ag(1)} - \int_0^1 f(x) \overline{Ag(x)} dx$$

$$= \int_0^1 f(x) \overline{Ag(1)} dx - \int_0^1 f(x) \overline{Ag(x)} dx = \int_0^1 f(x) [\overline{Ag(1)} - \overline{Ag(x)}] dx$$

$$= \int_0^1 f(x) \left(\int_x^1 g(t) dt \right) dx.$$

$$\text{D'où } A^*f(x) = \int_x^1 f(t) dt.$$

- 3) Pour $n \geq 1$ par la continuité de A , d'où: $\|A f\| \leq \frac{x}{n!} \|f\|$ (2)
 1) Supposons que la formule est vraie pour n .
 2) Montrons que c'est vraie pour $n+1$

$$\begin{aligned} |A^{n+1} f(x)| &= |A(A^n f)(x)| = \left| \int_0^x (A^n f)(t) dt \right| \\ &\leq \int_0^x |A^n f(t)| dt \leq \frac{1}{n!} \|f\| \int_0^x t^n dt \\ &\leq \frac{x}{n! (n+1)} \|f\| = \frac{x}{(n+1)!} \|f\| \end{aligned}$$

4) Le rayon spectral est défini par:

$$R(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|_{\infty}^{-\frac{1}{n}} \quad (1)$$

$$\text{d'où } \|A^n\|_{\infty}^{-\frac{1}{n}} \Rightarrow \|A^n\|_{\infty} \leq \left(\frac{1}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\text{D'autre part, d'où: } e^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} > \frac{n}{n!} \Rightarrow n! > \frac{n}{e^n}$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} > \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n!} = +\infty \quad \text{D'où } R(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|_{\infty}^{-\frac{1}{n}} = 0$$

$$\text{De plus d'où: } \sigma(A) \subset \overline{B}(0, R(A)) \Rightarrow \sigma(A) = \{0\}.$$

Ex 03: Soit $f \in L^2$, d'où

$$\begin{aligned} |A f(t)| &\leq |\cos(t)| \left| \int_0^t \sin(s) f(s) ds \right| \\ &\leq \int_0^t |\sin(s)| |f(s)| ds \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(s)| ds \end{aligned}$$

$$\left\langle \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(s)| ds \right)^{\frac{1}{2}} \right\rangle = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \|f\|. \quad (2)$$

$$\text{Ainsi } \|A f\| \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \|f\|.$$

2) Soient $f, g \in L^2$, d'où:

$$\langle A f, g \rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} A f(t) g(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) g(t) \left(\int_0^t \sin(s) f(s) ds \right) dt$$

Par intégration par parties

$$\langle A f, g \rangle = \left(- \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(s) g(s) ds \right) \left(\int_0^t \sin(s) f(s) ds \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) f(t) \cos(t) g(t) dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \left(\sin(t) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(s) g(s) ds \right) dt = \langle f, A^* g \rangle$$

$$\text{avec } A^* f(t) = \sin(t) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(s) f(s) ds.$$